

DOI:10.16799/j.cnki.esdqyfh.2024.05.026

鞍座边界的应力带桥计算方法

杨春^{1,2}, 梁井泉³

(1.上海顶新工程规划设计有限公司,上海市 201315;2.中土大地国际建筑设计有限公司上海分公司,上海市 201315;
3.中交公路规划设计院有限公司四川分公司,四川 成都 610218)

摘要: 为了准确分析应力带桥中应力带的受力情况,提出了鞍座支承应力带的计算方法。首先建立应力带在均布荷载作用下的弯矩平衡微分方程,再以应力带在鞍座分离点处挠度约为零、曲率半径为鞍座半径的边界条件来确定微分方程一般解的待定系数,最后根据几何协调关系反算鞍座的支承长度,通过迭代进行求解。为验证该方法的正确性和实用性,将该方法的计算结果与有限元模拟计算结果和铰支边界计算式的结果进行比较。结果表明:该方法的计算公式正确,能高效地找到应力带在鞍座上的分离点,比较支边界计算式的准确度更高,更适合在实际工程中应用。

关键词: 应力带桥;鞍座;边界条件;计算方法;鞍座最小半径

中图分类号: U442.5+4

文献标志码: B

文章编号: 1009-7716(2024)05-0105-04

0 引言

应力带桥是由悬垂的钢带(也称“应力带”)和放置在钢带上的桥面板构成的一种桥梁结构形式,是由古老的索桥结构演变而来。应力带属于张力构件,对桥梁墩台的抗推刚度要求较高,因而常用于人行桥。应力带桥的桥面结构轻薄,如同一条悬挂的丝带,是一种倍受外国工程师青睐的景观桥型。现代的应力带桥概念由德国工程师 Ulrich Finsterwalder 首次提出^[1],后经 Irvine、Strasky、Radnić 等的研究^[2-4],推动了应力带桥设计理论的发展和工程建设。现代应力带桥的特点是以高强钢板或者高强钢丝束作为应力带,上面离散放置混凝土板作为桥面板,并且可以与拱结合起来构成组合受力体系。现代应力带桥的工程案例主要分布在欧洲、美国和日本^[5-7],我国的应力带桥很少。据报道,我国首座现代应力带桥位于深圳光明小镇(见图1)。

应力带是应力带桥的关键受力构件,早期采用二次抛物线柔性索理论^[2,8-11]进行计算分析。这个理论没有考虑应力带的弯曲刚度,适合以铰链或者细钢丝绳作为应力带的情况。现代应力带桥多采用高强钢板作为应力带,钢板的弯曲刚度较大,如果仍采用柔性索理论,会出现较大的计算误差。张力梁



图1 深圳光明小镇应力带桥

理论^[3,12]在这种背景下应运而生,该理论兼顾了索和梁的力学特征,但已有的张力梁计算方法仅适用于铰支边界的应力带桥。实际工程中,桥梁墩台支承应力带的部位需要设计成圆弧形鞍座,以防止应力带出现急剧的弯曲变形破坏。显然,现有的计算方法不适合这种边界条件。另外,应力带在鞍座上的分离点(或者支承长度)与应力带的张力和弯曲刚度有关,属于非线性接触问题,即便使用有限元分析,也要多次试错、反复建模才能得到目标设计状态的计算结果。本文将研究鞍座边界的钢板应力带计算方法,解决传统方法不适用、有限元方法建模繁琐的难题。

1 理论推导

1.1 均布荷载作用的应力带力学模型

应力带桥主要用于人行桥,而且其桥面系一般是等宽等厚的构件,因此恒载与活载都是均布荷载。鞍座边界的钢板应力带计算简图如图2所示,跨径为

收稿日期: 2023-04-18

作者简介: 杨春(1982—),男,硕士,高级工程师,从事桥梁设计工作。

L ,均布荷载为 q ,应力带弯曲刚度为 EI ,左、右鞍座的半径分别为 R_0 和 R_1 ,应力带在鞍座上的分离点与左鞍座顶点的距离分别为 x_0 和 x_1 ,应力带挠曲变形为 $w(x)$,跨中设计垂度为 f ,应力带张力的水平分量为 H ,坐标系原点位于左鞍座顶点。

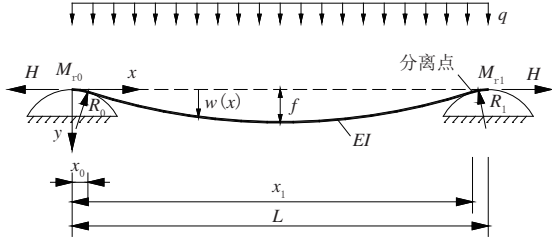


图2 鞍座边界应力带的计算简图

在鞍座支承范围以外,截取应力带受力变形后的一个微元(见图3),可以建立应力带的弯矩平衡微分方程:

$$EIw''''(x)-Hw''(x)=q \quad (1)$$

令

$$\lambda = \sqrt{H/EI} \quad (2)$$

$$\alpha = q/EI \quad (3)$$

微分方程(1)的一般解为:

$$w(x)=Ae^{\lambda x}+Be^{-\lambda x}-\frac{(\alpha x^2/2+Cx-D)\lambda^2+\alpha}{\lambda^4} \quad (4)$$

其中, A 、 B 、 C 和 D 为待定系数,需根据边界条件确定。

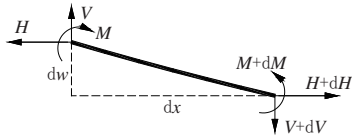


图3 弯曲变形下的应力带微元

1.2 应力带的边界条件

应力带在鞍座上的受力情况比较复杂。以如图4所示的左鞍座为例,在鞍座顶部,应力带与鞍座完全接触,弯矩为恒定值 $M_{r0}=-EI/R_0$ 。由于受张力方向改变、应力带自身弯曲刚度的影响,经过支承长度 x_0 后,应力带与鞍座分离,两个鞍座的分离点之间的应力带变形受弯矩平衡微分方程控制。因此,分离点处应力带的变形是微分方程的位移边界条件。受应力带拉应力控制的需求,鞍座半径通常设计到 20 m 以上,支承长度 x_0 比鞍座半径 R_0 小一个数量级,故应力带在鞍座顶部的转角 θ_0 也比较小,于是有 $w(x_0)=y_0=R_0(1-\cos\theta_0)\approx 0$ 。分离点处的应力带弯曲曲率仍与鞍座曲率相同,即 $w''(x_0)=1/R_0$ 。同理,在右鞍座分离点 x_1 处, $w(x_1)=y_1\approx 0$, $w''(x_1)=1/R_1$ 。

将上述边界条件代入式(4),可得待定系数 A 、

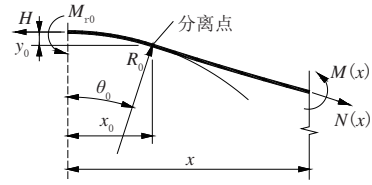


图4 鞍座处应力带的细节

B 、 C 和 D :

$$A = \frac{R_0 e^{-\lambda x_0} - R_1 e^{-\lambda x_1}}{2\lambda^2 R_0 R_1 \sinh[\lambda(x_1 - x_0)]} + \frac{\alpha(e^{-\lambda x_0} - e^{-\lambda x_1})}{2\lambda^4 \sinh[\lambda(x_1 - x_0)]} \quad (5)$$

$$B = \frac{R_1 e^{\lambda x_1} - R_0 e^{\lambda x_0}}{2\lambda^2 R_0 R_1 \sinh[\lambda(x_1 - x_0)]} + \frac{\alpha(e^{\lambda x_1} - e^{\lambda x_0})}{2\lambda^4 \sinh[\lambda(x_1 - x_0)]} \quad (6)$$

$$C = \frac{R_0 - R_1}{R_0 R_1 (x_1 - x_0)} - \frac{\alpha(x_0 + x_1)}{2} \quad (7)$$

$$D = \frac{R_0 x_0 - R_1 x_1}{R_0 R_1 (x_1 - x_0)} - \frac{\alpha x_0 x_1}{2} \quad (8)$$

1.3 鞍座支承长度的确定

由图4可知,应力带在鞍座上的支承长度 x_0 和 $(L-x_1)$ 与应力带的转角变形 $w'(x)$ 是几何协调的,即满足以下三角函数关系:

$$x_0 = R_0 \sin \theta_0 = R_0 \sin \{ \arctan[w'(x_0)] \} \quad (9)$$

$$L-x_1 = R_1 \sin \theta_1 = R_1 \sin \{ -\arctan[w'(x_1)] \} \quad (10)$$

1.4 计算步骤

式(4)中, H 、 $w(x)$ 、 x_0 和 x_1 均是未知量,显然不能直接求解,因此需要采用迭代方法进行求解。设计应力带桥时,一般将跨中挠度 $w(L/2)$ 达到指定垂度 f 作为已知量,就可以反算 H 、 x_0 和 x_1 。具体步骤如下:

(1)假定分离点的 X 坐标值为 $x_{0\text{设}}$ 、 $x_{1\text{设}}$ 。

(2)假定应力带张力的水平分量为 H ,代入式(4)计算 $w(L/2)$ 。如果 $|w(L/2)-f|$ 小于容许误差,则进入下一步骤。如果超过容许误差,则调整 H 值,直至收敛。

(3)将 $x_{0\text{设}}$ 、 $x_{1\text{设}}$ 和 H 代入 $w'(x)$,由式(9)和式(10)计算分离点坐标值 $x_{0\text{算}}$ 和 $x_{1\text{算}}$ 。如果 $|x_{0\text{设}}-x_{0\text{算}}|$ 、 $|x_{1\text{设}}-x_{1\text{算}}|$ 均小于容许误差,则终止迭代。如果超过容许误差,则调整 $x_{0\text{设}}$ 和 $x_{1\text{设}}$,重复步骤(1)~(3),直至收敛。

上述计算式收敛较快,一般只需几次迭代即可。迭代完成后,可进一步计算应力带各截面的张力、弯矩和剪力:

$$N(x) = \frac{H}{\cos \{ \arctan[w'(x)] \}} \quad (11)$$

$$M(x) = -EIw''(x) \quad (12)$$

$$V_s(x) = -EIw'''(x) \quad (13)$$

1.5 挠曲变形修正

如果要修正边界条件的近似处理对挠曲变形 $w(x)$

造成的误差,可以在以上迭代求解之后,分别计算鞍座处的 y_0 和 y_1 值,再将 y_0 和 y_1 的线性插值叠加到 $w(x)$ 。

1.6 鞍座最小半径

鞍座的最小半径 R_{min} 受应力带的拉应力控制,鞍座支承长度范围内应力带的拉应力由弯曲拉应力 $Et/(2R)$ 和轴向拉应力 $N/(bt)$ 组成。其中, N 为应力带的张力, b 和 t 分别为应力带的宽度和厚度。应力带的拉应力须小于钢材的抗拉强度 f_d , 因此可得鞍座的最小半径为:

$$R_{min} = \frac{0.5Et}{f_d - N/(bt)} \tag{14}$$

2 算例验证

上文推导的均布荷载作用下的应力带分析计算式是解析解,理论上是精确的。为了验证计算式的正确性,下面以一根应力带的有限元数值解与之进行对比。本算例两个鞍座顶点之间的距离 20 m,鞍座半径 20 m,应力带宽 400 mm,厚 20 mm,采用 Q420 钢,恒载 5.328 kN/m,行人荷载 4.5 kN/m,载人状态下的跨中设计垂度 0.467 m。

经过反复试错建模,得到受力状态下跨中垂度约为 0.467 m 的有限元模型,如图 5 所示。鞍座附近的单元划分较密,节点间距 50 mm,以便能较精确地定位分离点。计算求解需采用几何非线性和边界非线性分析。

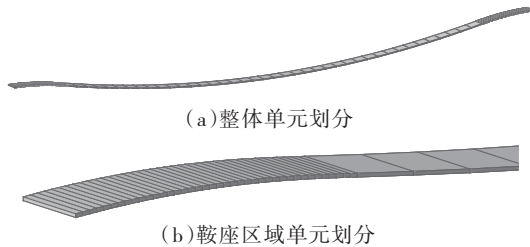


图 5 应力带有限元模型

图 6 为应力带的轴力分布图,轴力沿应力带分布均匀、变化不大,说明应力带具有索的受力特征。图 7 为应力带的弯矩分布图,鞍座区域为负弯矩,应力带从鞍座分离后,弯矩迅速转变为正弯矩,而且正弯矩区的弯矩分布也很均匀。

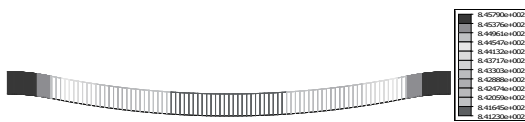


图 6 应力带张力分布(单位:kN)

根据鞍座区域的应力带弯矩分布图,负弯矩开始过渡到正弯矩的突变点即应力带在鞍座上的分离

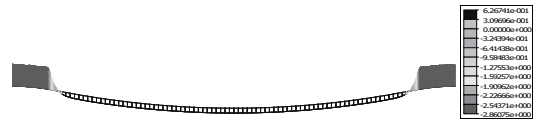


图 7 应力带弯矩分布(单位:kN·m)

点。图 8 为鞍座区域的应力带局部弯矩图,负弯矩从 33 号节点开始向正弯矩转变,因此 33 号节点可近似认为是分离点,相应的支承长度约为 1.60 m。

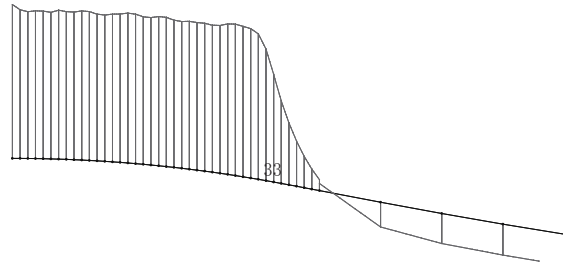


图 8 鞍座区域应力带弯矩

采用上文方法计算该算例,将主要结果的解析解与有限元数值解汇总于表 1 中。两种计算手段得到的结果偏差在 1.5% 以内,说明上文推导的计算式是正确的。

表 1 应力带计算结果对比

项目	跨中垂度 /m	支承长度 /m	水平张力 /kN	负弯矩 / (kN·m)	正弯矩 / (kN·m)
解析解	0.467	1.62	852	-2.75	0.63
数值解	0.472	1.60	841	-2.74	0.63
偏差 /%	1.1	-1.2	-1.3	-0.4	0

针对上述算例,还可以对不同的解析计算方法进行比较。若采用铰支边界张力梁计算方法,仍以跨中垂度 0.467 m 为设计目标,计算结果列于表 2。按铰支边界计算得到的水平张力比实际值大 23.3%,弯矩小 19.0%。说明边界条件对应力带的计算结果影响比较显著,设计时应合理地选用计算方法。

表 2 不同解析算法的应力带计算结果对比

项目	跨中垂度 /m	水平张力 /kN	正弯矩 / (kN·m)
鞍座边界解析解	0.467	852	0.63
铰支边界解析解	0.467	1 051	0.51
偏差 /%	0	23.3	-19.0

3 结语

应力带桥需要在墩台上设置圆弧形鞍座来支承应力带。为了能真实地反映鞍座对应力带整体受力的影响,提高计算结果的准确性,本文基于张力梁理论推导了圆弧形鞍座边界的钢板应力带的解析计算式,并用有限元算例进行了验证,得到以下主要结论。

(1)本文推导的应力带求解计算式正确可信,虽然有限元数值解与算式解析解存在微量偏差,但这些偏差主要来自有限元建模误差。计算式是由微分方程推导而来,本身是解析解,精度更高。

(2)利用本文的计算式能高效并且准确地找到应力带在鞍座上的分离点,克服了以往只能依靠有限元模型通过试错寻找分离点的困难,极大地提高了设计效率。

(3)与铰支边界的张力梁计算方法相比,本文方法的准确度更高,更适合应用于实际工程中。

参考文献:

- [1] WALTHER R. Spannbandbrücken [J]. Schweizerische Bauzeitung, 1987(8): 133-137.
- [2] Irvine M H. Cable Structures[M]. Cambridge: MIT Press, 1981.
- [3] Strasky J. Stress Ribbon and Cable Supported Pedestrian Bridges (2nd Edition)[M]. London: Thomas Telford Publishing, 2011.
- [4] RADNIĆ J, MATEŠAN D, BUKLIJAŠ –KOBOJEVIĆ D. Numerical model for analysis of stress-ribbon bridges[J]. Građevinar, 2015(10): 959-973.
- [5] HOLGATE A. The Art of Structural Engineering: the Work of Jorg Schlaich and his Team[M]. Fellbach: Edition Axel Menges, 1997.
- [6] AGRAWAL R. Stress ribbon bridges[J]. Structural Engineering, 2009, 87(22): 22-27.
- [7] 熊岡禎二, 小田徳昌, 等. 亀甲橋の施工[J]. コンクリート工学, 1992, 30(6): 39-47.
- [8] 胡柏学, 陈建平. 悬带桥设计与施工[J]. 中南公路工程, 1990(1): 45-50.
- [9] 陈冠雄, 张翔. 关于悬带桥的结构分析与计算[C]//1992年全国桥梁结构学术大会论文集. 上海: 同济大学出版社, 1992: 967-972.
- [10] 王喜军. 人行悬带桥的应用及受力特性分析[D]. 西安: 长安大学, 2006.
- [11] 范蕾, 姚辉瑞. 白水河悬带桥结构分析与设计[J]. 山东交通科技, 2009(6): 31-33, 36.
- [12] CHEN W F, DUAN L. Bridge Engineering Handbook-Super Structure Design (2nd Edition)[M]. New York: CRC Press, 2014.

《城市道桥与防洪》杂志

是您合作的伙伴, 为您提供平台, 携手共同发展!

欢迎新老读者订阅期刊 欢迎新老客户刊登广告

投稿网站: <http://www.csdqyfh.com> 电话: 021-55008850 联系邮箱: cdq@smedi.com